Análisis Matemático I Examen III

Foto: José Juan Castro

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Análisis Matemático I Examen III

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Roxana Acedo Parra

Granada, 2025-2026

Asignatura Análisis Matemático I.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Cañada Villar.

Descripción Examen Parcial 1.

Fecha 7 de noviembre de 2025.

Duración 110 minutos.

Ejercicio 1 (2 puntos, 0.5 cada apartado)**.** Contesta, razonadamente, si las afirmaciones que siguen son verdaderas o falsas.

a) $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado $\Rightarrow f(A)$ cerrado en $\mathbb{R}^m$.

b) $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto $\Rightarrow f(A)$ abierto en $\mathbb{R}^m$.

c) $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado $\Rightarrow f(A)$ acotado en $\mathbb{R}^m$.

d) $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ arcoconexo $\Rightarrow f(A)$ arcoconexo en $\mathbb{R}^m$.

Ejercicio 2 (5 puntos)**.** Considera la función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcula razonadamente, el subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ donde f es continua.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sea

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \\ 0, & (x,y) \notin \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestra que f es continua en $(x_0, y_0) \iff (x_0, y_0) = (0,0)$.

Ejercicio 1 (2 puntos, 0.5 cada apartado). Contesta, razonadamente, si las afirmaciones que siguen son verdaderas o falsas.

a) $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado $\Rightarrow f(A)$ cerrado en $\mathbb{R}^m$.
Falso. Como contraejemplo tomamos $n = m = 1$ y la función $\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2)$. Tomando el cerrado $\mathbb{R}$, tenemos que $\arctan(\mathbb{R}) = (-\pi/2, \pi/2)$. Que es un abierto en $\mathbb{R}$ (con la topología usual).

b) $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto $\Rightarrow f(A)$ abierto en $\mathbb{R}^m$.
Falso. Como contraejemplo tomamos $n = m = 1$ y la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tomando el abierto $\mathbb{R}$, tenemos que $f(\mathbb{R}) = \{c\}$. Que es un cerrado en $\mathbb{R}$ (con la topología usual).

c) $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado $\Rightarrow f(A)$ acotado en $\mathbb{R}^m$.
Verdadero. A acotado $\Rightarrow \overline{A}$ compacto $\Rightarrow f(\overline{A})$ compacto $\Rightarrow f(\overline{A})$ acotado. Como $f(A) \subseteq f(\overline{A})$, $f(A)$ es acotado.

d) $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $A \subset \mathbb{R}^n$ arcoconexo $\Rightarrow f(A)$ arcoconexo en $\mathbb{R}^m$.
Verdadero. $\forall y_1, y_2 \in f(A)$, $\exists x_1, x_2 \in A | f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2$. Como $x_1, x_2 \in A$ y A arcoconexo $\Rightarrow \exists \gamma : [0,1] \longrightarrow A$ continua, tal que $\gamma(0) = x_1, \gamma(1) = x_2$. Ahora

$$[0,1] \xrightarrow{\gamma} A \xrightarrow{f} f(A)$$
$$0 \longrightarrow x_1 \longrightarrow y_1$$
$$1 \longrightarrow x_2 \longrightarrow y_2$$

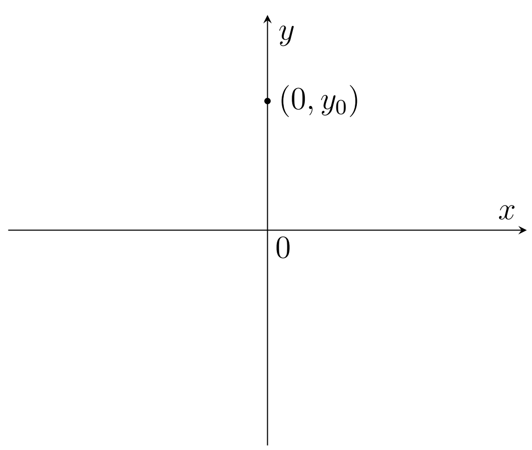
$f \circ \gamma : [0,1] \longrightarrow f(A)$ es un arcocontinuo, contenido en $f(A)$ que conecta y_1 con y_2.

Ejercicio 2 (5 puntos). Considera la función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcula razonadamente, el subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ donde f es continua.

Sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $x_0 \neq 0$, f es continua en (x_0, y_0) por el carácter local de la continuidad y la expresión de f cuando $x \neq 0$ (producto, cociente, etc. de funciones continuas). ¿Es continua en los puntos $x_0 = 0$, $(0, y_0)$?



Sean

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x=0}} f(x,y) = 1, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,y_0)\\ x\neq 0}} f(x,y) = \cos(y_0)$$

Luego f es continua en $(0,y_0) \iff \cos(y_0) = 1 \iff y_0 \in \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} = B$. Consecuentemente $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0\} \cup \{(0,y) : y \in B\}$.

Ejercicio 3 (3 puntos)**.** Sea

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2, & (x,y) \in \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \\ 0, & (x,y) \notin \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} \end{cases}$$

Demuestra que f es continua en $(x_0,y_0) \iff (x_0,y_0) = (0,0)$.

Comprobemos que es continua en $(0,0)$. Si $(x_0,y_0) = (0,0)$,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}} f(x,y) = 0, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ (x,y)\notin\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}} f(x,y) = 0$$

Luego f es continua en $(0,0)$ pues

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$$

Comprobemos que es continua sólo en ese punto. Si $(x_0,y_0) \neq (0,0) \Rightarrow x_0^2+y_0^2 > 0$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\notin\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}} f(x,y) = 0, \qquad \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}}} f(x,y) = x_0^2 + y_0^2$$

Así $\nexists \displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \Rightarrow f$ no continua en (x_0,y_0).

Por lo tanto queda demostrado que f es continua en $(x_0,y_0) \iff (x_0,y_0) = (0,0)$.